Clasa a IX-a

Soluții și bareme de corectare

Problema 1. Fie O și H centrul cercului circumscris, respectiv ortocentrul triunghiului ABC. Notăm cu O_1, O_2 și O_3 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor HBC, HAC, respectiv HAB.

Arătați că pentru orice punct $M \in OH$, vectorul $\vec{v} = \overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{MO_2} + \overrightarrow{MO_3}$ este coliniar cu $\overrightarrow{OH}$.

Cătălin Spiridon, Craiova (*Gazeta Matematică*)

Soluție. Observăm că A, B și C sunt ortocentrele triunghiurilor BHC, AHC, respectiv AHB. **1p**

Folosind teorema lui Sylvester, obținem $\overrightarrow{O_1A} = \overrightarrow{O_1H} + \overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{O_1C}$, de unde

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OO_1} = (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OO_1}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OO_1}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OO_1}).$$

Rezultă că $2\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - \overrightarrow{OA}$, deci $\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Analog deducem că $\overrightarrow{OO_2} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OO_3} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. **4p**

Deoarece $M \in OH$, există $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OH}$. Deducem că:

$$\vec{v} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{OO_3} - 3\overrightarrow{OM} = 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - 3\alpha\overrightarrow{OH} = (2 - 3\alpha)\overrightarrow{OH},$$

așadar $\vec{v}$ și $\overrightarrow{OH}$ sunt coliniari. **2p**

Problema 2. Arătați că pentru orice $a, b, c > 0$ are loc inegalitatea:

$$\frac{a^6}{b^4(c+a)} + \frac{b^6}{c^4(a+b)} + \frac{c^6}{a^4(b+c)} \geqslant \frac{a+b+c}{2}.$$

Marius Perianu

Soluție. Aplicând inegalitatea mediilor obținem:

$$\frac{a^6}{b^4(c+a)} + \frac{c+a}{4} \geqslant 2 \cdot \sqrt{\frac{a^6}{b^4(c+a)} \cdot \frac{c+a}{4}} = \frac{a^3}{b^2}, \quad (1)$$ **3p**

Pe de altă parte, $\frac{a^3}{b^2} + b + b \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^2} \cdot b \cdot b} = 3a$, deci $\frac{a^3}{b^2} \geqslant 3a - 2b$, (2) **2p**

Din (1) și (2) rezultă că $\frac{a^6}{b^4(c+a)} + \frac{c+a}{4} \geqslant 3a - 2b$, adică $\frac{a^6}{b^4(c+a)} \geqslant \frac{11a - 8b - c}{4}$.

Adunând cu inegalitățile analoage, obținute prin permutări circulare, obținem

$$\sum \frac{a^6}{b^4(c+a)} \geqslant \frac{11a - 8b - c}{4} + \frac{11b - 8c - a}{4} + \frac{11c - 8a - b}{4} = \frac{a+b+c}{2}.$$ **2p**

Notă. Inegalitatea (2) se poate demonstra și fără a aplica inegalitatea mediilor, arătând că ea este echivalentă cu $(a-b)^2(a+2b) \geqslant 0$.

Soluție alternativă. Aplicând inegalitatea Bergström, obținem

$$\sum \frac{a^6}{b^4(c+a)} = \sum \frac{\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^2}{c+a} \geqslant \frac{\left(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\right)^2}{(c+a)+(a+b)+(b+c)} = \frac{\left(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\right)^2}{2(a+b+c)}, \ (3) \ \ldots\ldots \ \mathbf{3p}$$

La fel ca în prima soluție, se arată că $\frac{a^3}{b^2} \geqslant 3a - 2b$ **2p**

Ca urmare, $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geqslant (3a-2b) + (3b-2c) + (3c-2a) = a+b+c$, iar din inegalitatea (3) rezultă că $\sum \frac{a^6}{b^4(c+a)} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{2}$. **2p**

Problema 3. Determinați numerele reale a cu proprietatea că

$$[x] + [x+a] + [x+2a] + [x+3a] = [4x], \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

unde notația $[\cdot]$ reprezintă partea întreagă.

Marius Perianu

Soluție. Pentru $x = 0$ se obține $[a] + [2a] + [3a] = 0$, $(*)$ **1p**

Presupunând $a < 0$, atunci $2a < 0$ și $3a < 0$, deci $[ka] \leq -1$, pentru orice $k \in \{1,2,3\}$. Ca urmare $[a] + [2a] + [3a] \leq -3 < 0$, contradicție cu relația $(*)$.

Așadar $a \geq 0$. În acest caz, pentru $k \in \{1,2,3\}$ avem $ka \geq 0 \Rightarrow [ka] \geq 0$.

Din $(*)$ rezultă $[ka] = 0 \Rightarrow ka \in [0,1) \Rightarrow a \in \left[0, \frac{1}{k}\right)$, pentru orice $k \in \{1,2,3\}$ și intersectând intervalele, obținem $a \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$. **1p**

Evident, identitatea din enunț are loc pentru $a = \frac{1}{4}$ (când se obține identitatea lui Hermite). **1p**

Vom arăta că aceasta este singura soluție a problemei.

Într-adevăr, presupunând $a \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$, pentru $x = \frac{1}{4}$ obținem

$$\left[\frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{4} + a\right] + \left[\frac{1}{4} + 2a\right] + \left[\frac{1}{4} + 3a\right] = 0 \neq 1 = \left[4 \cdot \frac{1}{4}\right], \text{ contradicție,}$$

deoarece pentru $k \in \{1,2,3\}$ avem $0 < \frac{1}{4} + ka < \frac{1}{4} + 3a < \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, deci $\frac{1}{4} + ka \in (0,1) \Rightarrow \left[\frac{1}{4} + ka\right] = 0$. **2p**

Acum, presupunând $a \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$, fie $x = 1 - 3a$. Pentru $k \in \{0,1,2\}$ avem:

$$0 < x + ka \leq x + 2a = 1 - 3a + 2a = 1 - a < 1,$$

adică $x + ka \in (0, 1)$, deci $[x] = [x + a] = [x + 2a] = 0$.

Cum $x + 3a = 1$, rezultă $[x] + [x + a] + [x + 2a] + [x + 3a] = 1$, (1)

De asemenea, avem:

$$a \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow 3a \in \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \Rightarrow x = 1 - 3a \in \left(0, \frac{1}{4}\right) \Rightarrow 4x \in (0, 1) \Rightarrow [4x] = 0. \qquad (2)$$

Din (1) și (2) se obține $[x]+[x + a]+[x + 2a]+[x + 3a] \neq [4x]$, contradicție cu enunțul.

În concluzie, $a = \dfrac{1}{4}$ **2p**

COLEGIUL NAȚIONAL LIVIU REBREANU - BISTRIȚA

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN „MATEMATICA, DE DRAG”

EDIȚIA A XVI-A, BISTRIȚA, 24 -26 NOIEMBRIE 2023

Clasa a X-a

Soluții și bareme de corectare

Problema 1. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

a) Arătați că pentru orice numere reale $d > c \geqslant b > a > 0$ astfel încât $a + d = b + c$ are loc inegalitatea:

$$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{d} < \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}.$$

b) Fie numerele reale pozitive $x_1 < x_2 < \ldots < x_{10}$ în progresie aritmetică. Aflați cel mai mare element al mulțimii:

$$S = \left\{ \sqrt[n]{x_i} + \sqrt[n]{x_j} + \sqrt[n]{x_k} \mid i, j, k \in \{1, 2, \ldots, 10\}, i + j + k = 12 \right\}.$$

Marius Perianu

Soluție. a) Cum $a + d = b + c$, rezultă că $b - a = d - c$. Observăm că:

$$\sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a} = \frac{b-a}{\sqrt[n]{b^{n-1}} + \sqrt[n]{b^{n-2}a} + \ldots + \sqrt[n]{ba^{n-2}} + \sqrt[n]{a^{n-1}}} \qquad (2)$$

$$\sqrt[n]{d} - \sqrt[n]{c} = \frac{d-c}{\sqrt[n]{d^{n-1}} + \sqrt[n]{d^{n-2}c} + \ldots + \sqrt[n]{dc^{n-2}} + \sqrt[n]{c^{n-1}}} \qquad (3)$$

În relațiile (2) și (3) fracțiile din membrul drept au același numărător, iar numitorul fracției din relația (2) este mai mic decât cel al fracției din relația (3). Ca urmare, obținem $\sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{d} - \sqrt[n]{c}$, de unde rezultă enunțul **2p**

b) Deoarece $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ sunt în progresie aritmetică, rezultă că, dacă $1 \leqslant i < j \leqslant k < \ell \leqslant 10$ astfel încât $i + \ell = j + k$, atunci $x_i + x_\ell = x_j + x_k$, (4) **1p**

Notăm $S(i, j, k) = \sqrt[n]{x_i} + \sqrt[n]{x_j} + \sqrt[n]{x_k}$, unde $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, 10\}$.

Din a) și din relația (4) rezultă că, dacă $1 \leqslant i < j \leqslant k < \ell \leqslant 10$ astfel încât $i + \ell = j + k$, atunci $S(n, i, \ell) < S(n, j, k)$, pentru orice $n \in \overline{1, 10}$, (5) **1p**

Date fiind $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ astfel încât $i + j + k = 12$, cel puțin unul dintre numerele i, j, k este mai mic sau egal cu 4. Folosind relația (5) obținem implicațiile:

- $i + j = 11 \Rightarrow S(1, i, j) \leqslant S(1, 5, 6)$,
- $i + j = 10 \Rightarrow S(2, i, j) \leqslant S(2, 5, 5)$
- $i + j = 9 \Rightarrow S(3, i, j) \leqslant S(3, 4, 5)$
- $i + j = 8 \Rightarrow S(4, i, j) \leqslant S(4, 4, 4)$.

Dar, conform (5), avem $S(1,5,6) < S(2,5,5) < S(3,4,5) < S(4,4,4)$, deci maximul căutat este $S(4,4,4) = 3\sqrt[n]{x_4}$ **3p**

Problema 2. Numerele complexe z_1, z_2, z_3, z_4 au proprietatea că $|z_k - 2| < 1$, pentru orice $k \in \{1,2,3,4\}$. Arătați că

$$|z_1 + z_2 + z_3 + z_4| \cdot \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_4}\right| > 12.$$

Cristian Moanță și *Lucian Tuțescu*, Craiova (*Gazeta Matematică*)

Soluție. Notăm cu E membrul stâng al inegalității. Pentru $k \in \{1,2,3,4\}$, notăm $z_k = a_k + \mathrm{i} \cdot \mathrm{b_k}$ și $r_k = |z_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$. Cum $|z_k - 2| < 1$, avem $(a_k - 2)^2 + b_k^2 < 1$. Așadar

$$4a_k > a_k^2 + b_k^2 + 3 \geqslant 2\sqrt{3\left(a_k^2 + b_k^2\right)} = 2\sqrt{3} \cdot r_k,$$

de unde rezultă $4a_k^2 > 3r_k^2$, adică $\dfrac{a_k}{r_k^2} > \dfrac{3}{4a_k}$, pentru orice $1 \leqslant k \leqslant 4$, (1)

.... **3p**

Obținem $E = F \cdot G$, unde $F = \sqrt{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 + (b_1 + b_2 + b_3 + b_4)^2}$ și

$$G = \sqrt{\left(\frac{a_1}{r_1^2} + \frac{a_2}{r_2^2} + \frac{a_3}{r_3^2} + \frac{a_4}{r_4^2}\right)^2 + \left(\frac{b_1}{r_1^2} + \frac{b_2}{r_2^2} + \frac{b_3}{r_3^3} + \frac{b_4}{r_4^2}\right)^2}.$$

Deducem că $F \geqslant \sqrt{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2}$ și $G \geqslant \sqrt{\left(\frac{a_1}{r_1^2} + \frac{a_2}{r_2^2} + \frac{a_3}{r_3^2} + \frac{a_4}{r_4^2}\right)^2}$, de unde reiese că $E \geqslant (a_1 + a_2 + a_3 + a_n)\left(\frac{a_1}{r_1^2} + \frac{a_2}{r_2^2} + \frac{a_3}{r_3^2} + \frac{a_4}{r_4^2}\right)$ **2p**

Folosind (1), obținem $\frac{a_1}{r_1^2} + \frac{a_2}{r_2^2} + \frac{a_3}{r_3^3} + \frac{a_4}{r_4^2} > \frac{3}{4}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}\right)$, și deoarece $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}\right) \geqslant 16$, rezultă că $E > \frac{3}{4} \cdot 16 = 12$ **2p**

Problema 3. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac relația

$$\max\big(f(x), f(y)\big) + \min(x,y) = \min\big(f(x), f(y)\big) + \max(x,y),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Mihai Piticari, Câmpulung Moldovenesc și *Dan Popescu*, Suceava

Soluție. Deoarece $\max(a,b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$ și $\min(a,b) = \dfrac{a+b-|a-b|}{2}$, din egalitatea din ipoteză deducem că $|f(x) - f(y)| = |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, (1) **2p**

Făcând $y = 0$ în (1), obținem $|f(x) - f(0)| = |x|$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, iar de aici rezultă $f(x) - f(0) = \pm|x|$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. **1p**

Dacă notăm $f(0) = a$, deducem că pentru orice număr real x avem $f(x) = x + a$ sau $f(x) = -x + a$. **1p**

Dacă există $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $f(x_1) = x_1 + a$ și $f(x_2) = -x_2 + a$, atunci din (1) obținem $|x_1 - x_2| = |f(x_1) - fx_2)| = |x_1 + x_2|$. Rezultă că $x_1 - x_2 = \pm(x_1 + x_2)$.

Dacă $x_1 - x_2 = +(x_1 + x_2)$, obținem $-x_2 = x_2$, adică $x_2 = 0$, absurd, iar dacă $x_1 - x_2 = -(x_1 + x_2)$, obținem $x_1 = -x_1$, adică $x_1 = 0$, absurd. Rezultă $f(x) = x + a, \forall x \in \mathbb{R}$ sau $f(x) = -x + a, \forall x \in \mathbb{R}$ **2p**

Prin calcul direct se verifică faptul că funcțiile de forma

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = x + a \quad \text{și} \quad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_2(x) = -x + a,$$

unde $a \in \mathbb{R}$, satisfac egalitatea din enunț. **1p**

Clasa a XI-a

Soluții și bareme de corectare

Problema 1. Fie $n \geqslant 2$ un număr natural și permutările $\sigma, \tau \in S_n$ astfel încât

$$\frac{\sigma(1)}{n+\tau(n)} = \frac{\sigma(2)}{n-1+\tau(n-1)} = \ldots = \frac{\sigma(n)}{1+\tau(1)}.$$

Arătați că $\sigma^2 = \tau$.

Marius Perianu (Gazeta Matematică)

Soluție. Folosind proprietățile șirului de rapoarte egale, toate rapoartele din relația din ipoteză sunt egale cu $\dfrac{\sigma(1)+\sigma(2)+\ldots+\sigma(n)}{1+2+\ldots+n+\tau(1)+\tau(2)+\ldots+\tau(n)} = \dfrac{1}{2}$ **2p**

Ca urmare, $2\sigma(n-k+1) = k+\tau(k)$, pentru orice $1 \leqslant k \leqslant n$, (1).

Fie $i_1 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât $\sigma(i_1) = n$. Pentru $k_1 \overset{not}{=} n+1-i_1$, din (1) obținem $k_1 + \tau(k_1) = 2n$, deci $k_1 = \tau(k_1) = n$. Reiese că $\tau(n) = n$, $i_1 = 1$ și $\sigma(1) = n$ **1p**

Fie acum $i_2 \in \{2, 3, \ldots, n\}$ astfel încât $\sigma(i_2) = n-1$ (evident, $i_2 \neq i_1$). Pentru $k_2 \overset{not}{=} n+1-i_2$, din (1) obținem $k_2 + \tau(k_2) = 2(n-1)$. Cum $k_2 \neq k_1 = n$, rezultă $k_2 \leqslant n-1$ și $\tau(k_2) \neq \tau(k_1) = n$, deci $\tau(k_2) \leqslant n-1$. Din $k_2 + \tau(k_2) = 2(n-1)$ rezultă $k_2 = n-1$ și $\tau(k_2) = n-1$. Reiese că $\tau(n-1) = n-1$, $i_1 = 2$ și $\sigma(2) = n-1$ **2p**

Un raționament inductiv conduce la $\sigma(k) = n-k+1$, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, respectiv $\tau = \mathrm{e}$, pentru care se verifică imediat că $\sigma^2 = \tau$ **2p**

Problema 2. Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $AB - BA = A$. Arătați că $A^3 = O_3$.

Radu Gologan

Soluție. Se știe că $\mathrm{Tr}(XY - YX) = 0$, pentru orice $X, Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Din ipoteză deducem că $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(AB - BA) = 0$, (1) **1p**

Înmulțim relația $AB - BA = A$ la stânga și la dreapta cu A și adunăm egalitățile obținute. Reiese că $A^2B - BA^2 = 2A^2$, deci $2\mathrm{Tr}(A^2) = \mathrm{Tr}(A^2B - BA^2) = 0$, de unde $\mathrm{Tr}(A^2) = 0$, (2). Analog obținem $A^3B - BA^3 = 3A^3$ și $\mathrm{Tr}(A^3) = 0$, (3) **2p**

Ecuația caracteristică a matricei A este $A^3 - \mathrm{Tr}(A)\cdot A^2 + mA - \det(A)\cdot I_3 = O_3$, unde $m = \frac{1}{2}\left((\mathrm{Tr}A)^2 - \mathrm{Tr}(A^2)\right)$. **2p**

Din (1) și (2) obținem $m = 0$, deci $A^3 = \det(A)\cdot I_3$, (2).

Trecând la urmă în ambii membri, rezultă că $\mathrm{Tr}(A^3) = 3\det(A)$. Dar $\mathrm{Tr}(A^3) = 0$, deci $\det(A) = 0$, iar din relația (2) obținem $A^3 = O_3$ **2p**

Problema 3. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ și $b_n = \frac{n}{1} + \frac{n-1}{2} + \frac{n-2}{3} + \ldots + \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n}$.

a) Demonstrați că șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este mărginit.

b) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{b_n}} = \mathrm{e}$.

Considerăm cunoscută dubla inegalitate:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}, \forall m \in \mathbb{N}^*. \qquad (*)$$

Mihai Piticari, Câmpulung Moldovenesc

Soluție. a) Deoarece $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n$, deducem că

$$a_{n+1} - a_n < 0 \iff \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \mathrm{e},$$

adevărată $\forall n \in \mathbb{N}^*$ conform (*), prin urmare $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este strict descrescător.

Prin logaritmare, din $(*)$ obținem $\ln(m+1) - \ln m < \frac{1}{m}$. Sumând aceste inegalități pentru $m = \overline{1, n-1}$, obținem $a_n > \frac{1}{n}, \forall n \geqslant 2$.

Cum $a_1 = 1$, rezultă că $0 < a_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, adică șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este mărginit ... **2p**

b) Notăm $x_n = (n!)^{\frac{1}{b_n}}$, prin urmare avem $\ln x_n = \frac{\ln(n!)}{b_n}$.

Avem $b_{n+1} - b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci sirul $(b_n)_{n\geqslant 1}$ este strict crescător. Pe de altă parte avem $b_n \geqslant n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, iar de aici obținem $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, prin urmare șirul $(b_n)_{n\geqslant 1}$ este nemărginit **1p**

Folosind teorema Cesàro-Stolz obținem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n!)}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)! - \ln n!}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1}{a_{n+1} + \ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n+1}\cdot\frac{1}{\ln(n+1)} + 1}, \ (1).$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln(n+1)} = 0$, iar $\left(a_n\right)_{n\geqslant 1}$ este șir mărginit, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} \cdot \dfrac{1}{\ln(n+1)} = 0$. Din relația (1) obținem $\lim\limits_{n\to\infty} \ln y_n = 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \mathrm{e}$. **4p**

Clasa a XII-a

Soluții și bareme de corectare

Problema 1. Se consideră mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Arătați că mulțimea M este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

b) Demonstrați că mulțimea $S = \{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ împreună cu operația de înmulțire a numerelor întregi formează o structură de monoid.

folclor matematic

Soluție. a) Notăm $A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, pentru orice $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Prin calcul direct obținem $A(a_1, b_1, c_1) \cdot A(a_2, b_2, c_2) = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ c_3 & a_3 & b_3 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{pmatrix} = A(a_3, b_3, c_3)$,

unde $\begin{cases} a_3 = a_1a_2 + b_1c_2 + c_1b_2 \in \mathbb{Z} \\ b_3 = a_1b_2 + b_1a_2 + c_1c_2 \in \mathbb{Z} \\ c_3 = a_1c_2 + b_1b_2 + c_1a_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$, deci M este parte stabilă a lui $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \cdot)$ **2p**

b) Calculând determinantul $\Delta(a,b,c) := \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ se obține $\Delta(a,b,c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$. Ca urmare, $S = \{\Delta(a,b,c) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ **2p**

Fie $u_k = a_k^3 + b_k^3 + c_k^3 - 3a_kb_kc_k \in S$, $k \in \{1, 2\}$.

Întrucât $u_1 = \Delta(a_1, b_1, c_1) = \det A(a_1, b_1, c_1)$ și $u_2 = \Delta(a_2, b_2, c_2) = \det A(a_2, b_2, c_2)$, folosind faptul că $\det(XY) = \det(X) \cdot \det(Y)$, pentru orice matrice $X, Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, cu notațiile de la punctul a) obținem $u_1u_2 = \Delta(a_3, b_3, c_3)$, deci S este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu înmulțirea numerelor întregi **2p**

Cum operația de înmulțire este asociativă pe $\mathbb{Z}$ și implicit pe $S \subset \mathbb{Z}$, iar $1 \in S$ deoarece $1 = \Delta(1, 0, 0)$, deducem că $(S, \cdot)$ este monoid **1p**

Problema 2. Pe mulţimea $M = (0, \infty)$ se dă legea de compoziţie asociativă „$*$" cu proprietatea că

$$x * y * z = \frac{xyz}{xy + yz + zx}, \text{ pentru orice } x, y, z \in M.$$

a) Arătaţi că legea „$*$" este comutativă.

b) Demonstraţi că $x * y = \dfrac{xy}{x+y}$, pentru orice $x, y \in M$.

Romanţa Ghiţă şi *Ioan Ghiţă*, Blaj (*Gazeta Matematică*)

Soluţie. Observăm că $x * y * z = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right)^{-1}$, pentru orice $x, y, z \in M$, (1).

Fie $x, y \in M$, alese arbitrar.

Din (1) deducem că $x * y * 1 = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{1}\right)^{-1} = \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1}\right)^{-1} = y * x * 1$, (2) **1p**

Compunând la dreapta cu 1, din relaţia (2) obţinem $(x * y * 1) * 1 = (y * x * 1) * 1$, de unde rezultă că $(x * y) * 1 * 1 = (y * x) * 1 * 1$.

Folosind din nou relaţia (1), obţinem $\left(\dfrac{1}{x * y} + \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{1}\right)^{-1} = \left(\dfrac{1}{y * x} + \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{1}\right)^{-1}$, de unde reiese că $x * y = y * x$.

Cum $x, y \in M$ au fost alese arbitrar, rezultă că legea „$*$" este comutativă **1p**

b) Din (1) obţinem $3 * 3 * 3 = 1$, de unde rezultă că $(3 * 3 * 3) * (x * y) = 1 * x * y$, adică

$(3 * 3) * 3 * (x * y) = 1 * x * y \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{3 * 3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{x * y}\right)^{-1} = \left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)^{-1}$, (3) **2p**

Din (3), pentru $x = y = 3$ obţinem $\left(\dfrac{1}{3 * 3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3 * 3}\right)^{-1} = \left(1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\right)^{-1}$, de unde rezultă $3 * 3 = \dfrac{3}{2}$ **2p**

Revenind în (3) obţinem $x * y = \dfrac{xy}{x+y}$ **1p**

Problema 3. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{e^x + 1}$ şi F primitiva lui f cu proprietatea că $F(0) = 0$.

a) Arătaţi că $F(-1) + F(1) = \dfrac{1}{2}$.

b) Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ definit prin $a_0 > 0$ şi $a_{n+1} = F(a_n)$, $n \geq 0$.

Calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{\sqrt{a_{k+1}}}$.

Florian Dumitrel

Soluţie. a) Funcţia $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = F(x) + F(-x)$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $G'(x) = f(x) - f(-x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1} + \dfrac{xe^x}{e^x + 1} = x$ **1p**

Deducem că $G(x) = \dfrac{x^2}{2}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $F(-1) + F(1) = G(1) = \dfrac{1}{2}$ ... **1p**

Soluție alternativă. Avem $F(-1)+F(1) = \int_0^{-1} f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_{-1}^0 f(x)\,dx$ **1p**

Cu schimbarea de variabilă $\varphi : [0,1] \to [0,1]$, $x = \varphi(t) = -t$, obținem $\int_{-1}^0 f(x)\,dx = \int_0^1 f(-t)\,dt$, deci $F(-1) + F(1) = \int_0^1 (f(x) - f(-x))\,dx = \int_0^1 x\,dx = \dfrac{1}{2}$ **1p**

b) Deoarece $F'(x) > 0$ pentru orice $x > 0$ și $F(0) = 0$, rezultă că $F(x) > 0$ pentru orice $x > 0$ și, în consecință, $a_n > 0$ pentru orice $n \geq 0$. La fel, din

$$(x - F(x))' = \frac{e^x - x + 1}{1 + e^x} \geq \frac{2}{1 + e^x} > 0$$

rezultă că $F(x) < x$ pentru orice $x > 0$, deci $a_{n+1} = F(a_n) < a_n$ pentru orice $n \geq 0$. Așadar, șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent. Fie $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ $(a \geq 0)$. Dacă am avea $a > 0$, atunci, prin trecere la limită în relația de recurență, am obține $F(a) = a$, în contradicție cu $F(a) < a$. Deci $a = 0$ **3p**

Pentru calculul limitei vom folosi lema Stolz-Cesaro:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{a_{k+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{a_k^2}{F(a_k)}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{a_{n+1}^2}{F(a_{n+1})}} = 2,$$

întrucât $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{F(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x^2)'}{F'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{f(x)} = 4$ **2p**