Ministerul Educației

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2024

CLASA a X-a

Problema 1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $b > 0$. Determinați cea mai mică valoare posibilă a numărului real α pentru care:

$$(a+b)^x \geq a^x + b, \quad \forall x \geq \alpha.$$

Problema 2. Fie ABC un triunghi înscris în cercul $\mathcal{C}$ de centru O și rază 1. Pentru orice $M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B, C\}$, notăm $s(M) = OH_1^2 + OH_2^2 + OH_3^2$, unde H_1, H_2, H_3 sunt ortocentrele triunghiurilor MAB, MBC, respectiv MCA.

a) Demonstrați că dacă triunghiul ABC este echilateral, atunci $s(M) = 6$, oricare ar fi $M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B, C\}$.

b) Demonstrați că dacă există trei puncte distincte $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{C} \setminus \{A, B, C\}$ astfel încât $s(M_1) = s(M_2) = s(M_3)$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Gazeta Matematică

Problema 3. Fie a, b, c numere complexe nenule de același modul pentru care numerele $A = a + b + c$ și $B = abc$ sunt reale. Demonstrați că, pentru orice număr natural n, numărul $C_n = a^n + b^n + c^n$ este real.

Problema 4. Fie $n \in \mathbb{N}^\star$. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică:

$$f(x + y^{2n}) = f(f(x)) + y^{2n-1} f(y),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ și pentru care ecuația $f(x) = 0$ are soluție unică.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.