Ministerul Educației

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ 1902-2024

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2024

CLASA a IX-a

Problema 1. Fie patrulaterul convex $ABCD$, ale cărui diagonale se intersectează în punctul O. Dacă $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{OC}$, arătați că $ABCD$ este un paralelogram.

Gazeta Matematică

Problema 2. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1=\dfrac{1}{2}$ și $2n\cdot a_{n+1}=(n+1)a_n$, oricare ar fi numărul natural nenul n.

a) Stabiliți formula termenului general a_n al șirului, unde n este un număr natural nenul.

b) Dacă $b_n=a_1+a_2+...+a_n$, arătați că numerele $\{b_n\},\{b_{n+1}\}$ și $\{b_{n+2}\}$ nu pot fi termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice pentru niciun număr natural nenul n.

(Am notat cu $\{x\}$ partea fracționară a numărului real x.)

Problema 3. Se consideră numărul natural compus n și $1=d_1<d_2<d_3<...<d_k=n$ divizorii naturali ai lui n, unde $k\geq 3$. Dacă toate ecuațiile $d_{i+2}x^2-2d_{i+1}x+d_i=0$, unde $i\in\{1,2,...,k-2\}$, au soluții reale, arătați că există un număr prim p astfel încât $n=p^{k-1}$.

Problema 4. Fie H ortocentrul triunghiului ascuțitunghic ABC și X mijlocul laturii BC. Perpendiculara în H pe HX taie laturile (AB) și (AC) în punctele Y respectiv Z. Notăm cu O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și cu O' centrul cercului circumscris triunghiului BHC.

a) Arătați că $HY=HZ$.

b) Demonstrați că $\overrightarrow{AY}+\overrightarrow{AZ}=2\overrightarrow{OO'}$.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.