Ministerul Educației
Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2024

CLASA a XII-a

Problema 1. Determinaţi numerele naturale n, cu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pentru care ecuaţia

$$x^2 - \hat{3} \cdot x + \hat{5} = \hat{0}$$

are o unică soluţie în inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$.

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie $f : [0,1] \longrightarrow (0, \infty)$ o funcţie continuă pe $[0,1]$, iar $A = \int\limits_0^1 f(t)\, dt$.

a) Arătaţi că funcţia $F : [0,1] \longrightarrow [0, A]$, definită pentru orice $x \in [0,1]$ prin $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, este inversabilă, cu inversa derivabilă.

b) Arătaţi că există o unică funcţie $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, astfel încât egalitatea

$$\int_0^x f(t)\, dt = \int_{g(x)}^1 f(t)\, dt \tag{1}$$

să aibă loc pentru orice $x \in [0,1]$.

c) Arătaţi că există $c \in [0,1]$ pentru care $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{g(x) - c}{x - c} = -1$, unde g este funcţia unic determinată de relaţia (1).

Problema 3. Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Spunem că inelul $(A, +, \cdot)$ are proprietatea $CP(k)$, dacă pentru orice $a, b \in A$ există $c \in A$, astfel încât $a^k = b^k + c^k$.

a) Daţi un exemplu de inel finit $(A, +, \cdot)$, care nu are proprietatea $CP(k)$ pentru niciun număr natural k, cu $k \geq 2$.

b) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, iar $M(n) = \{m \in \mathbb{N}^* | \, (\mathbb{Z}_n, +, \cdot) \text{ are proprietatea } CP(m)\}$. Demonstraţi că $M(n)$ este un monoid în raport cu operaţia de înmulţire, inclus în mulţimea $2 \cdot \mathbb{N} + 1$ a numerelor naturale impare.

Problema 4. Fie $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, cu derivata continuă, astfel încât $f(0) = 0$, iar $0 \leq f'(x) \leq 1$ pentru orice $x > 0$. Demonstraţi că

$$\int_0^a f(t)^{2n+1}\, dt \leq (n+1) \cdot \left(\int_0^a f(t)^n\, dt \right)^2, \qquad \text{pentru orice } a > 0 \text{ şi orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.