



Colegiul Național „Livu Rebreanu” Bistrița

Str. B-dul Republicii Nr. 8, cod 420057

telefon: 0363100438



web: www.cnlr.ro, e-mail: rebreanu@cnlr.ro

Testare în vederea transferului – Clasa a XI-a-27.08.2025

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați A^n ($n \in \mathbb{N}^*$) și, apoi, determinați matricea $B = A + A^2 + A^3 + \dots + A^n$.
2. Fie $a \in \mathbb{R}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & x & -1 \\ a & 1 & x \end{pmatrix}$. Determinați valorile lui a , pentru care matricea A este inversabilă, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
3. Să se determine mulțimea valorilor funcției f pe intervalul considerat, în cazul: $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(3x - 1)$, $x \in [1; 3]$.
4. Calculați : a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 6x + 8}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x^2 + 1}{2x^3 + x + 2}$; c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 - x + 2}}$; d) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x}{x-3} - \frac{9}{x(x-3)} \right)$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{x}$;
5. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1} + ax + b \right) = 2$.
6. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$.
 - a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = 0$
 - b) Demonstrați că funcția f este crescătoare pe intervalul $(4, +\infty)$.
 - c) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f .
7. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \ln x$
 - a) Calculați $f'(x)$, $x \in (0, +\infty)$
 - b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$
 - c) Demonstrați că funcția f este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$

Notă:

1. Toate subiectele sunt obligatorii!
2. Se acordă 10 puncte din oficiu!
3. Timp efectiv de lucru 90 de minute!
4. Punctaj: 1. 10p. 2. 10p. 3. 5p. 4. a) 5p, b) 5p, c) 5p, d) 5p, e) 5p. 5. 10p, 6. a) 5p, b) 5p, c) 5p. 7. a) 5p, b) 5p, c) 5p.

Clasa a XI-a

BAREM DE CORECTARE ȘI DE NOTARE

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

1.	$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$ Demonstrăm prin inducție matematică: $P(n): A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$ I Etapa de verificare: $n = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ adevărat}$ II Etapa de demonstrare: Presupunem că $P(k)$ este adevărată și demonstrăm că $P(k + 1)$ este adevărată. $P(k): A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall k \in \mathbb{N}^* \text{ este adevărată.}$ $P(k + 1): A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall k \in \mathbb{N}^*.$ $A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 1 & 1+k & 1+k+\frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & 1+k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 1 & 1+k & \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ 0 & 1 & 1+k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P(k + 1) \text{ este adevărată.}$	1p
		1p
		1p
		1p
		1p

	Din I și II rezultă că $P(n): A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ este adevărată. $B = A + A^2 + A^3 + \dots + A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \dots +$ $\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 1+2+3+\dots+n & 1+3+6+\dots+\frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & n & 1+2+3+\dots+n \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} n & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\ 0 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}.$	1p 1p 1p
2.	A este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & x & -1 \\ a & 1 & x \end{vmatrix} = x^2 + 3 - 0 - ax + 1 - 0 = x^2 - ax + 4.$ $\det(A) = x^2 - ax + 4, \det(A) \neq 0 \Rightarrow x^2 - ax + 4 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, ceea ce are loc când ecuația $x^2 - ax + 4 = 0$ (ca ecuație în necunoscuta x) nu are rădăcini în $\mathbb{R}$, condiție îndeplinită dacă $\Delta < 0. \Delta = a^2 - 16 \Rightarrow a^2 - 16 < 0$, de unde $a \in (-4, 4)$.	1p 3p 2p 4p
3.	$x \in [1; 3] \Rightarrow 1 \leq x \leq 3 \Rightarrow 3 \leq 3x \leq 9 \Leftrightarrow 2 \leq 3x - 1 \leq 8.$ $\log_{\frac{1}{2}} 2 \geq \log_{\frac{1}{2}} (3x - 1) \geq \log_{\frac{1}{2}} 8 \Leftrightarrow -3 \leq \log_{\frac{1}{2}} (3x - 1) \leq -1 \Leftrightarrow f(x) \in [-3; -1]$	1p 4p
4.	a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 6x + 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x - 5}{2x - 6} = -\frac{3}{2}.$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x^2 + 1}{2x^3 + x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^2 - 2x}{6x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{24x - 2}{12x} = 2.$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 - x + 2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}}{ x \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = \infty.$ d) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x}{x-3} - \frac{9}{x(x-3)} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = 2$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} + 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} + 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \right) = 1 + 2 + 3 = 6$	5p 5p 5p 5p 5p
5.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1} + ax + b \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 3 + ax^2 + ax + bx + b}{x + 1}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1+a) + x(2+a+b) + b-3}{x+1}.$ Discuție: Dacă $1 + a \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1+a) + x(2+a+b) + b-3}{x+1} = \infty$, ceea ce nu convine. Deci $1 + a = 0 \Rightarrow a = -1$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1+b) + b-3}{x+1} = 2 \Rightarrow b + 1 = 2 \Rightarrow b = 1.$	2p 1p 3p 2p 2p
6.	a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = f'(4)$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}.$ $f'(4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$ b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}, f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, care nu aparține intervalului $(4, \infty)$ sau $x = 4$, care nu aparține intervalului $(4, \infty)$. Prin urmare $\forall x \in (4, \infty) \Rightarrow x(x - 4) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ este crescătoare pe intervalul $(4, \infty)$. c) $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} (\sqrt{x} - \ln x) = +\infty.$ $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta pentru graficul funcției f	2p 2p 1p 1p 1p 2p 1p 3p 2p

7.	a) $f'(x) = (x \cdot \ln x)' = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)'$ $= \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1, x \in (0, +\infty)$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ c) $f''(x) = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x} > 0, \forall x \in (0, +\infty)$ f convexă pe intervalul $(0, +\infty)$	2p 3p 5p 3p 2p
----	--	--

- *Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.*